Problemita con solución compacta

S02: Recursos adicionales (2)

🏭 FASE 1: El Salto a la Forma Compacta (Modelos de 1 Índice)

El Problema: La Red de Proveedores de Matrix S.A. Matrix S.A. ya no fabrica solo 2 productos como en la semana 1, ahora es una multinacional. Necesita comprar un componente químico clave para su producción y tiene en su radar a **10 proveedores diferentes** en todo el mundo.

- Matrix necesita comprar un total de **1,600 toneladas** para cubrir su demanda.
- Cada proveedor le cobra un **precio distinto** por tonelada.
- Cada proveedor tiene un límite máximo de toneladas que puede venderle (**disponibilidad**).
- El objetivo es **minimizar el costo total** de la compra.

Si hiciéramos esto en la "Forma Extendida" (como en la Semana 1), tendríamos que escribir X_1 + X_2 + X_3 + … + X_10 = 1600$, y lo mismo para los costos. ¡Mucha vaina! Aquí entra la **Forma Compacta**:

1. Definición de Índices (Las "Etiquetas")

En lugar de inventar una letra para cada proveedor, creamos un "conjunto".

- **i** : Tipo de proveedor (i = 1, 2, 3, … , 10).

2. Variables de Decisión (Lo que vamos a decidir)

Usamos el índice como un subíndice. Es como crear una "familia" de incógnitas.

- **X_i** : Cantidad de toneladas del químico a comprar al proveedor i.

3. Parámetros (La Data del problema)

Son los números fijos que el problema nos da. Los agrupamos en vectores (listas):

- **Costo_i** : Costo por tonelada del proveedor i.
- **Disponibilidad_i** : Límite máximo de toneladas que tiene el proveedor i.

4. Función Objetivo (El uso de la Sumatoria Σ)

Queremos minimizar el costo. La letra griega Sigma (Σ) funciona como una aspiradora que multiplica y suma todo automáticamente.

- **Minimizar Z =** $\sum_{i=1}^{10}$ **Costo_i * X_i** *(Traducción: Suma el costo del proveedor 1 por lo que le compre al 1, más el costo del 2 por lo que le compre al 2, y así hasta el 10).*

5. Restricciones (El secreto del Σ y el ∀)

Aquí está la magia de la Semana 2. Existen dos tipos de restricciones:

- **Regla Agrupada (Se usa Sumatoria):** Ocurre cuando todos los proveedores "aportan" a una misma bolsa o meta. En este caso, la demanda total.

  - $\sum_{i=1}^{10} X\_i = 1600$

- **Regla Individual (Se usa el "Para todo"):** Ocurre cuando la regla aplica de manera independiente a cada proveedor. En este caso, no puedes comprarle a un proveedor más de lo que tiene.
  - $X_i \leq Disponibilidad_i \; \forall \; i = 1, \ldots, 10$. *(Traducción: La cantidad comprada a i debe ser menor o igual a su disponibilidad, y repite esta regla PARA TODO proveedor del 1 al 10).*
- **Restricción de Signo:**
  - $X_i \geq 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, 10$

👾 FASE 2: Los Errores en la Matrix (Casos Especiales)

A veces, la vida real está mal planteada, y al meter los datos al modelo, la matemática "colapsa" o arroja anomalías. Para entenderlos visualmente, imagina que Matrix S.A. analiza solo 2 de sus productos estrella: **Baterías (B)** y **Cables (C)**.

Aquí tienes los 4 escenarios de Casos Especiales que ocurren cuando formulamos mal o tenemos escenarios peculiares:

🚫 1. Solución Infactible (La Misión Imposible)

- **¿Qué es?** El problema no tiene solución. Geométricamente, las áreas de tus restricciones nunca se cruzan; la región factible está vacía.
- **El Escenario:** Imagina que tienes una restricción de capacidad de máquina que dice que máximo puedes fabricar 10 productos en total ($B + C \leq 10$). Pero, al mismo tiempo, el departamento de ventas te exige que produzcas por lo menos 15 productos para cumplir una cuota ($B + C \geq 15$).
- **La explicación técnica:** Es matemáticamente imposible cumplir ambas reglas al mismo tiempo. El modelo te dirá: *Infactible*.

🚀 2. Solución No Acotada (El Glitch de Recursos Infinitos)

- **¿Qué es?** La región factible está abierta hacia el infinito y no hay ninguna restricción que detenga el crecimiento de tu ganancia (Z tiende al ∞).
- **El Escenario:** Quieres Maximizar tus ganancias ($Z = 10B + 5C$). Tus únicas restricciones son que $B \geq 5$ y $C \geq 2$. ¡Olvidamos ponerle el límite de horas máquina o presupuesto!
- **La explicación técnica:** Al no haber un "techo" (restricción de $\leq$), el software te dirá que para ganar más dinero, simplemente fabriques infinitas baterías e infinitos cables. En un examen, esto significa que planteaste mal tus recursos limitados.

🤝 3. Múltiples Óptimos (El Camino del Tesoro Extendido)

- **¿Qué es?** No hay un solo vértice ganador, sino que hay infinitas soluciones óptimas a lo largo de toda una línea, y todas te dan exactamente la misma ganancia máxima.
- **El Escenario:** Supongamos que tu Función Objetivo es Maximizar $Z = 10B + 10C$ (ganas $10 por cada producto). Y tu restricción de tiempo es $1B + 1C \leq 5$.
- **La explicación técnica:** La línea de tu meta (Función Objetivo) tiene exactamente la misma pendiente (inclinación) que tu línea de restricción. Por ende, fabricar (5 Baterías, 0 Cables), o (0 Baterías, 5 Cables), o cualquier combinación intermedia decimal, te dará exactamente $50 de ganancia. ¡Tienes libertad absoluta para elegir cualquier plan sobre esa línea!.

🧱 4. Solución Degenerada (La Restricción de Adorno)

- **¿Qué es?** En el gráfico, esto ocurre cuando en tu vértice óptimo chocan más líneas de las que matemáticamente se necesitan. Es decir, el punto está "sobredeterminado".
- **El Escenario:** Tienes una Solución Óptima en el punto donde fabricas $B = 4$ y $C = 3$. Ese punto se formó porque cruzaste la línea de límite de Baterías ($B \leq 4$) y límite de cables ($C \leq 3$). Pero, casualmente, tienes una tercera restricción de empaque que dice $B + C \leq 7$.
- **La explicación técnica:** ¡La tercera línea pasa exactamente por el mismo punto (4,3)! Si la borras (restricción redundante), la respuesta óptima seguiría siendo exactamente la misma. En el método algebraico (Simplex), esto causa que una variable básica tome el valor exacto de cero.

💡 **HACK DE ESTUDIO PARA LA SEMANA 2:** Si en el examen te piden formular, piensa siempre: **¿Es una regla para el total o para cada uno?**

- Si es para el total → Usa sumatoria Σ al inicio.
- Si es para cada uno → Usa ∀(Para todo) al final de la línea.

Recuerda que la Función Objetivo nunca lleva ∀ en su formulación!