Ejemplo PLASTICAXI explicado

S01: Recursos adicionales (3)

EL PROBLEMA: Caso "Plasticaxi S.A."

Este es el ejemplo más conocido en todo el curso: La empresa Plasticaxi produce platos y cubiertos de plástico por lotes. La venta de un lote de platos genera una utilidad de $12 (miles de dólares), y un lote de cubiertos genera $10 (miles de dólares). Ambos productos deben pasar por dos máquinas (A y B).

- Un lote de platos requiere 4 horas en la Máquina A y 8 horas en la Máquina B.
- Un lote de cubiertos requiere 6 horas en la Máquina A y 4 horas en la Máquina B.
- Diariamente, la Máquina A tiene 12 horas disponibles y la Máquina B tiene 16 horas disponibles.
- Todo lo que se produce se vende.
- **Misión:** Determinar el plan de producción óptimo para maximizar las utilidades.

FASE 1: Formulación del Modelo Matemático

Traduce el problema del español a las matemáticas. Recuerda la regla **FO-RE-SI**:

1. Variables de Decisión (Lo que controlas):

- P = Cantidad de lotes de platos a producir.
- C = Cantidad de lotes de cubiertos a producir.

2. Función Objetivo - FO (Tu meta principal):

- **Maximizar** $Z = 12P + 10C$ (Expresado en miles de dólares).

3. Restricciones - RE (Tus límites):

- *(I) Límite de Máquina A:* $4P + 6C \leq 12$.
- *(II) Límite de Máquina B:* $8P + 4C \leq 16$.

4. Restricciones de Signo - SI (Lógica del mundo real):

- $P \geq 0$, $C \geq 0$ (No puedes fabricar cantidades negativas).

FASE 2: Resolución por el Método Gráfico

Como hay exactamente 2 variables (P y C), el Método Gráfico es ideal. Usaremos el Eje X para los Platos (P) y el Eje Y para los Cubiertos (C).

Paso 1: Tabulación (Encontrar los cortes en los ejes)

Transforma temporalmente las inecuaciones (≤) en igualdades (≡) para dibujar las líneas rectas. ¿Cómo trazamos una recta? Encontrando dónde corta a los ejes haciendo que una variable valga cero y despejando la otra:

- **Recta (I) Máquina A:** 4P + 6C = 12
  - Si P = 0 ⇒ 6C = 12 ⇒ C = 2. Punto 1: **(0, 2)**.
  - Si C = 0 ⇒ 4P = 12 ⇒ P = 3. Punto 2: **(3, 0)**.
- **Recta (II) Máquina B:** $8P + 4C = 16$
  - Si P = 0 ⇒ 4C = 16 ⇒ C = 4. Punto 1: **(0, 4)**.
  - Si C = 0 ⇒ 8P = 16 ⇒ P = 2. Punto 2: **(2, 0)**.

Paso 2: Dibujar y Sombrear la Región Factible (RF)

Trazas ambas rectas en el plano. Como las restricciones son "menor o igual" (≤) y debes cumplir la no negatividad (solo cuadrante positivo), sombreas el polígono que queda por *debajo* de ambas rectas, acercándose al origen (0,0). Esa área común es tu **Región Factible (RF)**: ¡el espacio donde viven todas las soluciones posibles!.

Paso 3: La Recta de Isoutilidad (La ráfaga de viento)

Para saber qué punto del polígono te da más dinero, graficamos la Función Objetivo (Z = 12P + 10C).

- **Truco de pros:** Asume un valor arbitrario para Z que sea múltiplo de 12 y 10 para que sea fácil graficar. Elijamos Z = 60.
- 12P + 10C = 60.
  - Si P = 0 ⇒ C = 6 **(0, 6)**.
  - Si C = 0 ⇒ P = 5 **(5, 0)**.
- Dibujas esta recta punteada. Representa una utilidad de $60.

Paso 4: Hallar la Solución Óptima

Aplica la **Analogía del Globo y el Viento**. Tu recta de isoutilidad sería el "viento". Como quieres *maximizar*, debes "empujar" esta recta paralela a sí misma alejándola del origen. El último vértice (esquina) de la Región Factible que toque esta recta antes de salir volando, es tu **Solución Óptima**. Al desplazarla, notarás que el último punto que toca es exactamente la intersección entre la Recta (I) y la Recta (II).

Paso 5: Cálculo Analítico (¡Evita la Trampa Mortal!)

⚠️ *Peligro de Examen:* Nunca adivines el valor del vértice, sólo mirando tu dibujo a mano alzada. Siempre debes resolver el sistema de ecuaciones de las líneas que colisionan.

Resolvemos el sistema (I y II) para hallar la coordenada exacta:

1. 4P + 6C = 12
2. 8P + 4C = 16

Multiplicamos la ecuación 1 por (-2) para eliminar P:

1. $-8P - 12C = -24$
2. $8P + 4C = 16$

Suma ambas: $-8C = -8 \Rightarrow C = 1$.

Reemplazamos C=1 en la primera ecuación: $4P + 6(1) = 12 \Rightarrow 4P = 6 \Rightarrow P = 1.5$

FASE 3: El Veredicto (Interpretación del Problema)

Hemos encontrado matemáticamente el "Punto Perfecto".

- **Plan de Producción Óptimo:** La empresa debe fabricar exactamente **1.5 lotes de platos** y **1 lote de cubiertos**. *(Nota: La Programación Lineal asume divisibilidad, por lo que los decimales son totalmente válidos en esta etapa, pero solo en esta etapa).*
- **Valor Óptimo (Z*):** Reemplazamos nuestro plan en la Función Objetivo: $Z = 12(1.5) + 10(1) = 18 + 10 = 28$. La utilidad máxima que la empresa puede lograr es de **$28,000**.

Insights adicionales de pro: Como el vértice óptimo se forma cruzando las restricciones de la Máquina A y la Máquina B, ambas son **Restricciones Activas**. Esto significa que Plasticaxi S.A. consumirá el 100% de las 12 horas de la máquina A y las 16 horas de la máquina B para lograr esos $28,000; no le sobrará ni un solo minuto (su *holgura* es cero).