SEM 01: EJERCICIOS RESUELTOS

Introducción para el ejercicio colaborativo

PARTE A: IDENTIFICACIÓN DE LA EDO

- **Tipo:**
  1. **EDO:** Derivadas ordinarias ($dy/dx \ o \ y'$). Una sola variable independiente ($x \ o \ t$).
  2. **EDP:** Derivadas parciales ($\partial u/\partial x$). Dos o más variables independientes.

- **Orden:** La derivada más alta que aparezca. (Si ves y''', es de Orden 3).

- **Grado:** El exponente al que está elevada la derivada más alta. (Si tienes $(y'')^5$, es Grado 5).

- **Linealidad (Las 3 reglas para y):** Es Lineal **SOLO SI** cumple todo esto:
  1. La variable y y todas sus derivadas tienen exponente 1.
  2. No hay multiplicaciones entre y y sus derivadas ($y * y'$ es NO lineal).
  3. La variable y no está dentro de funciones ($sen(y)$, e^y, $ln(y)$ son NO lineales).
     Nota: Las operaciones sobre x no afectan la linealidad.

MEMOTECNIA: TOL - G (Tipo, **O**rden, **L**inealidad, **G**rado**)**

PARTE B: VERIFICACIÓN DE SOLUCIONES

- **Identificación visual:**
  1. **General:** Contiene constantes arbitrarias (C_1, C_2, K, A).
  2. **Particular:** No tiene constantes arbitrarias (solo números definidos).

- **Algoritmo de comprobación (4 pasos):**
  1. **Identifica:** Analiza las derivadas de $y(x)$ hasta el grado máximo que pida la EDO.
  2. **Deriva:** Obtén las derivadas que identificaste en el EDO
  3. **Reemplaza:** Sustituye tu y y las derivadas calculadas en la EDO original.
  4. **Resuelve:** Multiplica, factoriza y simplifica algebraicamente a ambos lados.
     *Nota: Debes llegar obligatoriamente a la identidad **0=0**. Escribe textualmente: "Dado que se reduce a una identidad, la función es solución".*

S1: SOLUCIÓN DE UNA EDO

SOLUCIÓN DE UNA EDO

1. IDENTIFICAR EL ORDEN DE LA EDO
2. DERIVAR
3. REEMPLAZAR
4. RESOLVER

Ejemplo : Mostrar que $y = x^2 - x^{-1}$, es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2x^{-2}y = 0$. ① EDO DE ORDEN 2 (y'')

SOL: ② DERIVAR HASTA (y'')

$y = x^2 - x^{-1}$

$y' = 2x + x^{-2}$

$y'' = 2 - 2x^{-3}$

③ REEMPLAZAR

EDO: $y'' - 2x^{-2}y = 0$

$(2 - 2x^{-3}) - 2x^{-2}(x^2 - x^{-1}) = 0$

$\cancel{2} - \cancel{2x^{-3}} - \cancel{2} + \cancel{2x^{-3}} = 0$

IDENTIDAD $0 = 0$ //

$-2x^{-2}(x^2 - x^{-1})$

$\underbrace{-2x^{-2}(x^2)}\underbrace{-2x^{-2}(-x^{-1})}$

$-2(x^{-2+2}) + 2(x^{-2-1})$

$-2(1) + 2x^{-3}$

④ RESOLVER ($A \neq B$)

Ejemplo : Mostrar que $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$, es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y' = 2y$. ①

SOL: ②

$y = Ae^{-x} + Be^{2x}$

$y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$

$y'' = Ae^{-x} + 4Be^{2x}$

③

EDO: $y'' - y' = 2y$

$(Ae^{-x} + 4Be^{2x}) - (-Ae^{-x} + 2Be^{2x}) = 2(Ae^{-x} + Be^{2x})$

$Ae^{-x} + 4Be^{2x} + Ae^{-x} - 2Be^{2x} = 2Ae^{-x} + 2Be^{2x}$

④ IDENTIDAD $2Ae^{-x} + 2Be^{2x} = 2Ae^{-x} + 2Be^{2x}$ //

SOLUCIÓN EXPLÍCITA DE UNA EDO

$y =$ "ALGO"

La función $y = \operatorname{sen}x + 3\cos x + x^2$ es una solución explícita de la edo $y'' + y = x^2 + 2$ ①

SOL: ②

$y = \operatorname{sen}x + 3\cos x + x^2$

$y' = \cos x - 3\operatorname{sen}x + 2x$

$y'' = -\operatorname{sen}x - 3\cos x + 2$

③

EDO $= y'' + y = x^2 + 2$

$(-\operatorname{sen}x - 3\cos x + 2) + (\operatorname{sen}x + 3\cos x + x^2) = x^2 + 2$

$-\cancel{\operatorname{sen}x} - \cancel{3\cos x} + 2 + \cancel{\operatorname{sen}x} + \cancel{3\cos x} + x^2 = x^2 + 2$

④ IDENTIDAD $x^2 + 2 = x^2 + 2$ //

SOLUCIÓN IMPLÍCITA DE UNA EDO

y NO ESTÁ DEFINIDA

Mostrar que $x + y + e^{xy} = 0$ es una solución implícita de la edo $(1 + xe^{xy})\dfrac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0$.

SOL:

$x + y + e^{xy} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = \frac{d}{dx}0$

$\frac{d}{dx}(x) = 1$

$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}(e^{xy}) = e^{xy}\frac{d}{dx}(xy)$

$= e^{xy}(y + x\frac{dy}{dx})$

$1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}(y + x\frac{dy}{dx}) = 0$

$1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}y + e^{xy}x\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx}(e^{xy}x + 1) + e^{xy}y + 1 = 0$ //

$\frac{d}{dx}(e^{xy}) = e^u . u'$

$= e^{xy}\frac{d}{dx}(xy)$

$\frac{d}{dx}(xy) = x'y + xy'$

$= (1)y + x\frac{dy}{dx}$

$= y + x\frac{dy}{dx}$

Comprobar que la función $f(x) = e^{-3x} - 2$ es solución de la EDO dada en el intervalo $(-\infty; \infty)$: $y'' - 9y = 18$. ①

SOL: ②

$y = e^{-3x} - 2$

$y' = -3e^{-3x}$

$y'' = 9e^{-3x}$

③

EDO: $y'' - 9y = 18$

$(9e^{-3x}) - 9(e^{-3x} - 2) = 18$

$\cancel{9e^{-3x}} - \cancel{9e^{-3x}} + 18 = 18$

IDENTIDAD $18 = 18$ // ④

Sea C una constante arbitraria. Verifique que la función definida por la ecuación $xy^2 - y^3 = C$ es solución de la EDO: $(2x - 3y)y' + y = 0$.

SOL:

$$xy^2 - y^3 = C \longrightarrow \frac{dy}{dx}(xy^2 - y^3) = \frac{dy}{dx}C$$

$$\frac{dy}{dx}(xy^2) = x'y + xy'$$
$$= (1)y + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}(xy^2) = y^2 + x2y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}(-y^3) = -3y^2\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}C = 0$$

$$\left(\left(y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0\right) : y$$
$$y + 2x\frac{dy}{dx} - 3y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y) + y = 0$$
$$y'(2x - 3y) + y = 0 \;//$$

$$\left(y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0\right)y$$
$$\frac{y^2}{y} + \frac{2x\cancel{y}}{\cancel{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{3y^2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{0}{y}$$
$$y^{2-1} + 2x\frac{dy}{dx} - 3y^{2-1}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$y + 2x\,y' - 3y\,y' = 0$$

SOLUCIÓN IMPLÍCITA

Determine si la función $e^{xy} + y = x - 1$ es una solución explícita o implícita de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

SOL:

$$e^{xy} + y = x - 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx}(e^{xy} + y) = \frac{dy}{dx}(x - 1)$$

$$(-e^{xy}y).e^{-xy} = -e^{xy-xy}(y)$$
$$= -e^{(0)}(y) = 1y$$

$$\frac{dy}{dx}(e^{xy}) = e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$
$$\frac{dy}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}(x) = 1$$
$$\frac{dy}{dx}(-1) = 0$$

$$e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} = 1$$
$$e^{xy}y + e^{xy}x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx}(e^{xy}x + 1) = 1 - e^{xy}y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - e^{xy}y}{1 + e^{xy}x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 - e^{xy}y}{1 + e^{xy}x}\right) \cdot \frac{e^{-xy}}{e^{-xy}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x} \;//$$

SOLUCIÓN IMPLÍCITA

PROXIMAMENTE + EJERCICIOS RESUELTOS...